

Cariche elettriche

Forza di Coulomb

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2 \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Coulomb ha osservato che una carica puntiforme genera un campo E radiale

La forza elettrica è radiale con modulo proporzionale a $1/r^2$

- comportamento analogo alla forza gravitazionale di Newton
- differenze: \mathbf{F} può essere sia attrattiva che repulsiva e q può essere >0 o <0

$10^9 \approx k = 8.9875 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \approx 10^{-14}$

Non ha significato fisico

Lavoro ed energia potenziale

La forza elettrica è radiale, quindi conservativa

LAVORO: $\mathcal{L}(A \rightarrow B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = U(r_A) - U(r_B)$

ENERGIA POTENZIALE: $U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$

La forza è il gradiente (∇) dell'energia potenziale

Principio di sovrapposizione

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \equiv q\mathbf{E}(x, y, z, t)$$

Forza fra più cariche elettriche

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

quindi definiamo E

Campo Elettrico: ha dimensione $[E] = \text{N/C}$
 È un campo vettoriale in 3 dimensioni spaziali ed una dimensione temporale: tre funzioni di x, y, z, t che definiscono una freccia in ogni punto dello spazio x, y, z , ad ogni tempo t .

Potenziale elettrico

$$\varphi = \frac{U}{q} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}$$

φ è il potenziale elettrico, è definito a meno di una costante additiva, usualmente fissata imponendo $\varphi=0$ all'infinito.
 $[\varphi] = \text{Joule/Coulomb} \equiv \text{Volt} = \text{V}$

Si definiscono le superfici equipotenziali come le superfici con $\varphi = \text{costante}$
 Sono ortogonali al campo elettrico

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

$\mathbf{F} = -\nabla U$
 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$

Quantizzazione della carica

eV=electronVolt

L'elettronvolt è unità di misura dell'energia, definito come:
 eV \equiv energia che un elettrone acquista attraversando 1 Volt
 In formule:
 eV $\equiv e \times V = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb} \times \text{Volt} = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}$

Il segno

La gravità è attrattiva fra masse dello stesso segno (le masse sono positive). Viceversa cariche di segno uguale si respingono, ed esistono cariche sia positive che negative.

Newton vs Coulomb

Gravità < Forza Elettrica

(in sistemi di poche particelle elementari):
 Ad esempio nell'idrogeno $F_N/F_C = 4\pi\epsilon_0 G_N m_p m_p / e^2 = 4.4 \cdot 10^{-40}$

La forza di Coulomb batterebbe l'attrazione gravitazionale, ad esempio fra Terra e Sole, se questi corpi contenessero un piccolo sbilanciamento di carica (per la Terra basterebbe separare circa 10^{14} cariche, molto meno di una mole)

Limite continuo

Filo -> lineare

Superficie (disco, piano, ...) -> superficiale

Volume (sfera) -> volumetrica

- Definiamo la densità di carica volumetrica $\rho(\mathbf{r}) = dq/dV$.
- Come vedremo in seguito, in casi interessanti (come i conduttori) le cariche si dispongono su superfici. Definiamo quindi la densità superficiale di carica $\sigma(\mathbf{r}) = dq/dS$.
- Già che ci siamo definiamo anche la densità di carica lineare $\lambda(\mathbf{r}) = dq/ds$.

Le notazioni sono standard. In generale si hanno cariche di tutti e tre i tipi:

$$dq = \rho dV + \sigma dS + \lambda ds. \quad (1.10)$$

Carica totale

$$Q = \sum_i q_i \approx \int dq' = \int dV' \frac{dq'}{dV'} = \int dV' \rho(\mathbf{r}')$$

Similmente $Q = \int dS \sigma$ e $Q = \int ds \lambda$

Campo elettrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Potenziale elettrico

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Energia elettrica

$$U = \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \approx \frac{1}{2} \int \frac{dq' dq''}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} = \frac{1}{2} \int dV' dV'' \frac{\rho(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}$$

Forma più utile

$$U = \frac{1}{2} \sum_j q_j \varphi(\mathbf{r}_j)_{\text{altre}} = \frac{1}{2} \int dq \varphi = \frac{1}{2} \int dV \rho \varphi$$

Atomi e materia

Å=Ångström

Raggio degli atomi, si usa al posto della costante di Plank, misura 10^{-10} m (10^{-8} cm)
 Ricaviamo anche la massa dell'atomo cioè 10^{-26} kg

Teorema di equipartizione

(temperatura T) \sim (energia media)

Ogni grado di libertà ha energia media $k_B T/2$.
 Nelle equazioni compare la costante di Boltzmann k_B , che è solo una costante di conversione. Per $T=20 \text{ C}^\circ = 293.15 \text{ K}$ le singole particelle hanno energia tipica $E = k_B T = eV/39.6$

Atomo

Si osserva che è circa 100 volte minore della velocità della luce

Schematizzando l'atomo ep come e leggero che ruota in orbita classica circolare attorno al p pesante circa fermo, la velocità dell'elettrone è:

$$v_e = e\sqrt{1/4\pi\epsilon_0 m_e r} \approx c/137 \ll c.$$

$$\omega = v_e/r = e/\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r^3} \approx 4.1 \cdot 10^{16} \text{ Hz.}$$

velocità angolare

$$E = \frac{m_e v_e^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -13.6 \text{ eV} \equiv 1 \text{ Rydberg.}$$

energia di legame (assumendo orbita circolare)

Stime

$$F_C \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \text{Å}^2} \approx 10^{-8} \text{ N.}$$

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = 27 \text{ Volt}$$

per $r=0.53 \text{ Å}$ (atomo di H)

Materia

In base all'ipotesi che la materia sia tenuta assieme da forze elettriche, si deduce che ricombinare una mole di materia fornisce o richiede energia
 $U \sim N_A \cdot eV \sim 10^5 \text{ Joule} \sim 100 \text{ kcal}$ (cal=4.2J)

Oggetti

Si fanno stime ragionevoli, ad es. approssimo una mucca con una sfera o un cilindro